Azonosító jel: | | | | | | | | | | | | | | | |

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2021. május 4.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

2021. május 4. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

EMBERI ERŐFORRÁSOK MINISZTÉRIUMA

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

1. **a)** Igazolja, hogy bármely hat egymást követő természetes szám szorzata osztható 45-tel!

b) Igaz-e, hogy bármely öt egymást követő **páratlan** természetes szám szorzata osztható 45-tel? (Válaszát indokolja!)

c) Hány olyan megoldása van a $45 = 3 + 5 + a + b + c$ egyenletnek, amelyben a, b és c különböző **páratlan** természetes számok, és $5 < a < b < c$ is teljesül?

d) Határozza meg az $(A \vee B) \to C$ állítás logikai értékét az A, B és C kijelentések különböző lehetséges logikai értékei esetén, és töltse ki ennek megfelelően az alábbi igazságtáblázatot! (Válaszait **itt** nem szükséges indokolnia.)

A	B	C	$(A \vee B) \to C$
i	i	i	
i	i	h	
i	h	i	
i	h	h	
h	i	i	
h	i	h	
h	h	i	
h	h	h	

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
d)	3 pont	
Ö.:	13 pont	

2. A Budavári Siklót 1870-ben építették. Korabeli források szerint a sikló (hegyoldali vasútvonal) kivitelezője, Wohlfarth Henrik a pálya eredeti tervekben szereplő kb. 33 fokos hajlásszögét – ma már nem tudni, milyen okból – 30 fokra csökkentette. A kivitelezés során a felső állomás helye változatlan maradt, az alsó állomás azonban a tervekhez képest 6 méterrel feljebb került. (Az alsó állomás tervezett és valóságos helyét összekötő képzeletbeli egyenes merőleges a földfelszínre.)

a) Határozza meg a sikló pályájának hosszát és a pálya szintemelkedését!

A feljegyzések szerint a millennium évében, 1896-ban a sikló összesen 670 ezer utast szállított. Tételezzük fel, hogy a sikló egy napi üzemideje 14 óra volt, s kéthetente egy napra karbantartás céljából leállították a közlekedését, azaz megközelítőleg 340 napot üzemelt az év során. A menetek közti átlagos követési időköz 10 perc volt.
Akkoriban egy-egy kocsi egyszerre 22 utast szállíthatott. A pályán összesen két kocsi közlekedik: egy menetben az egyik felfelé, a másik lefelé halad ugyanabban az időben.

b) A megadott adatok alapján számítsa ki, hogy kb. hány százalékos volt a férőhelyek átlagos kihasználtsága 1896-ban!

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

3. Egy egyetemi előadáson 32-en ülnek a kisteremben. Ha négy lány távozna, akkor a jelenlévők több mint 60%-a fiú lenne. Ha azonban a 32 főhöz további hat lány csatlakozna, akkor a jelenlévők több mint fele lenne lány.

a) Hány fiú és hány lány lehet jelen az előadáson?

Az egyetem több ezer hallgatójának 60%-a fiú, 40%-a lány. (Ezt tekinthetjük úgy, hogy 0,6 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott hallgató fiú, és 0,4 annak a valószínűsége, hogy lány.)

b) Ha az egyetem büféjében egy asztalhoz véletlenszerűen ül le négy hallgató, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy több fiú van közöttük, mint lány?

Ha három lányhallgató találkozik véletlenszerűen, akkor 0,008 annak a valószínűsége, hogy mindegyikük rendszeresen sportol.

c) A lányok hányadrésze sportol rendszeresen?

a)	6 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	13 pont	

4. Adott az $x^2 - 4y = 0$ egyenletű parabola és az $x - y = 5$ egyenletű g egyenes.

a) Igazolja, hogy a parabola fókuszpontja az $F(0; 1)$ pont!

b) Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja a g egyenesen van, valamint átmegy a $P(0; -1)$ ponton és a parabola F fókuszpontján is!

c) Adja meg a parabola g egyenessel párhuzamos érintőjének egyenletét!

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	13 pont	

II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

5. Kovács úr új autót vásárolt 5 millió forintért. Egy matematikai modell szerint az autó egy év alatt elveszíti az aktuális értékének 12%-át.

a) Ha csak az értékvesztést vesszük figyelembe, akkor hány teljes év elteltével ér 1,5 millió forintnál kevesebbet Kovács úr autója?

A Precíz Kft. havi amortizációval (értékvesztéssel) számolja ki a gépjármű aktuális értékét. (Havi amortizáció: az autó értéke minden hónapban az előző havi értékének ugyanakkora százalékával csökken.)

b) Mutassa meg, hogy ha az éves értékvesztés 12%-os, akkor a havi amortizáció megközelítőleg 1,06%-os!

Kovács úr szeretné eladni törésmentes és jó állapotú autóját a Precíz Kft.-nek.
A Kft. szórólapján az áll, hogy kétféleképpen is kiszámítják az autó aktuális értékét, és az eladó számára kedvezőbb árat garantálják.
I. módszer: a jelenlegi akciójukban 12 hónapot levonnak az autó valós életkorából, majd 1,06%-os havi amortizációval számolják ki az autó értékét.
II. módszer: az autó által megtett kilométerek alapján számítják ki az autó „életkorát” úgy, hogy évente átlagosan 15 000 km-es megtett utat feltételeznek; ebben az esetben azonban 1,2%-os havi amortizációval számolnak (az 1,06% helyett), és nincsen 12 hónap kedvezmény.

c) Melyik számítási módszer a kedvezőbb Kovács úr számára, ha az autója 8 éves 5 hónapos, és az autó eddig 91 250 km utat tett meg?

a)	5 pont	
b)	4 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. **a)** Egy szabályos dobókockával hatszor dobtunk. A dobott számok egyetlen módusza, a mediánja és az átlaga – ebben a sorrendben – egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozat három szomszédos tagja.
Adjon meg egy megfelelő dobássorozatot, és igazolja, hogy a megadott dobássorozat a feltételeknek megfelel!
Igaz-e, hogy a megadott hat szám szórása is tagja ugyanennek a számtani sorozatnak?

b) Egy szabályos dobókockával háromszor dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a másodiknak dobott szám éppen a másik két dobott szám átlaga?

a)	8 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

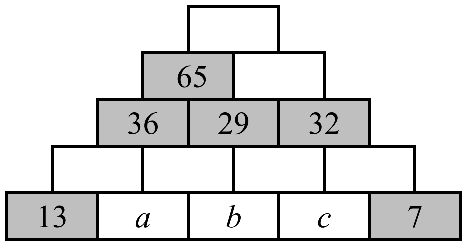
7. **a)** Egy tömör fából készült forgáshenger magassága 30 cm, felszíne 10 000 cm^2. A hengerből egy olyan forgáskúpot készítenek, amelynek az alapköre és a magassága megegyezik a hengerével.
A henger térfogatának hány százaléka lesz forgács, és mekkora a kúp térfogata?

b) Határozza meg a 10 000 cm^2 felszínű forgáshengerek közül a legnagyobb térfogatú henger alapkörének a sugarát és a henger magasságát!

a)	7 pont	
b)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. A rejtvényújságok egyik kedvelt feladattípusa a *számpiramis*. Az előírás szerint a számpiramis üres mezőibe pozitív egész számokat kell írni úgy, hogy az egymás mellé kerülő számok összege megegyezzen a föléjük írt számmal.
Az ábrán látható számpiramisban a 13, 7, 36, 29, 32 és a 65 kezdőszámok adottak.



a) Számítsa ki a, b és c értékét!

1852-ben egy londoni diák az Anglia megyéit ábrázoló térkép színezése közben úgy találta, hogy a megyék „helyes” színezéséhez legfeljebb négy színre van szükség. (Helyes színezés esetén a közös határszakasszal rendelkező megyék különböző színűek.) A diák sejtésének általánosítása tetszőleges térképek esetére (négyszín-tétel) sokáig megoldatlan matematikai probléma volt.
A térképrészleten Tolna megye és négy megyeszomszédja látható. Az öt megyét legfeljebb négy színnel színezzük ki (piros, sárga, kék és zöld).

b) Hányféleképpen színezhető helyesen ez a térképrészlet?
(Két színezés különböző, ha van legalább egy megye, melynek a két színezésben más a színe.)

a)	9 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

9. **a)** Igazolja, hogy $\frac{2}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$ ($n \in \mathbf{N}^+$).

b) Számítsa ki az $a_n=\frac{2}{(n+1)^2-1}$ sorozat első négy tagjának az összegét!

Válaszát $\frac{a}{b}$ alakban adja meg, ahol a és b relatív prím pozitív egész számok!

c) Határozza meg a $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$ határértéket!

a)	3 pont	
b)	3 pont	
c)	10 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	13		**51**	
	2.	12			
	3.	13			
	4.	13			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum　　　　javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum　　　　dátum

javító tanár　　　　jegyző