	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	11		**51**	
	2.	14			
	3.	14			
	4.	12			
II. rész		16		**64**	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma				**115**	

dátum — javító tanár

	pontszáma **egész számra** kerekítve	
	elért	programba beírt
I. rész		
II. rész		

dátum — dátum

javító tanár — jegyző

ÉRETTSÉGI VIZSGA • 2023. május 9.

MATEMATIKA

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

minden vizsgázó számára

2023. május 9. 9:00

Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

OKTATÁSI HIVATAL

Matematika
emelt szint
Azonosító jel:

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.
4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.
9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

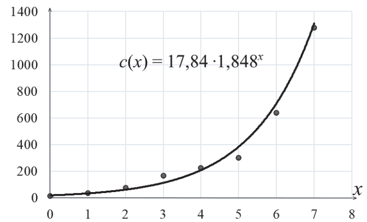
1. Az interneten található adatok[1] alapján a napenergiát elektromos energiává alakító eszközök maximális összteljesítményének magyarországi alakulását az alábbi táblázat szemlélteti (megawattban mérve).

év	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
összteljesítmény (MW)	12	35	77	168	225	300	640	1277

a) A fenti táblázat adatai alapján készült a következő táblázat, amely azt mutatja, hogy hányszorosára változott a maximális összteljesítmény az egymást követő években az előző évi maximális összteljesítményhez viszonyítva. A még hiányzó három számot írja az alábbi táblázat üres mezőibe, majd számítsa ki a kapott 7 szám átlagát és szórását!

év	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
ebben az évben a maximális összteljesítmény az **előző évinek** ennyiszerese:	2,92		2,18		1,33		2,00

A maximális összteljesítmény alakulását exponenciális növekedésűnek feltételezve egy táblázatkezelő program az első táblázatban megadott adatok alapján a $c(x)=17,84\cdot 1,848^x$ közelítő összefüggést adja, ahol x a 2012 óta eltelt évek száma (x természetes szám), $c(x)$ pedig MW-ban adja meg a maximális összteljesítményt a modell szerint.



b) Hány százalékkal tér el a 2018. évi 640 MW-os adattól a modell alapján kiszámítható 2018-as érték?

c) Oldja meg a valós számok halmazán a $17,84\cdot 1,848^x = 40000$ egyenletet!

a)	4 pont	
b)	3 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	11 pont	

[1] https://hu.wikipedia.org/wiki/Napenergia_Magyarországon

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

9. A valós számok halmazán értelmezett f függvény f' **deriváltfüggvényének** hozzárendelési szabálya: $f'(x)=(x-2)^2\cdot(x-5)$.

a) Adja meg az f függvény összes lokális (helyi) szélsőértékének típusát és helyét!

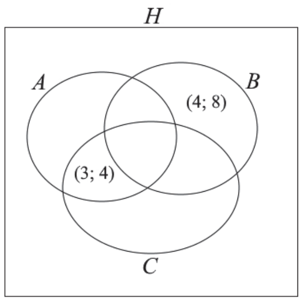
b) Határozza meg az f függvény hozzárendelési szabályát úgy, hogy az f grafikonja áthaladjon a (0; 1) ponton!

c) Igazolja, hogy a $g:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$; $g(x)=\dfrac{3x^3+x}{x^2+1}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

a)	5 pont	
b)	5 pont	
c)	6 pont	
Ö.:	16 pont	

2. Legyen a H alaphalmaz a pozitív egészekből álló számpárok halmaza,
az A, B és C pedig a H alábbi részhalmazai:
$A = \{(a;b) \mid a \text{ és } b \text{ relatív prímek}\}$;
$B = \{(a;b) \mid a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$;
$C = \{(a;b) \mid a \text{ és } b \text{ közül legalább az egyik prímszám}\}$.
(Ha $a \neq b$, akkor az $(a;b)$ és a $(b;a)$ számpárokat különbözőnek tekintjük.)

a) Az alábbi Venn-diagram két részébe beírtunk egy-egy számpárt. Írjon a diagram további hat üres részébe egy-egy megfelelő számpárt!



Tekintsük a következő két állítást (a, b, c pozitív egészek)!
I. Ha c osztója ab-nek, akkor c osztója a-nak vagy c osztója b-nek.
II. Ha a osztója c-nek és b osztója c-nek, akkor ab osztója c-nek.

b) Határozza meg a két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!

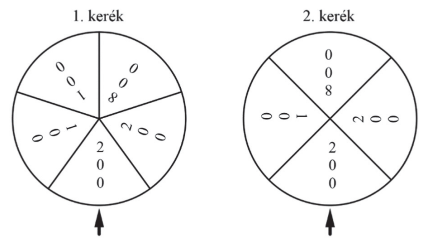
c) Fogalmazza meg az I. állítás megfordítását, és határozza meg a megfordítás logikai értékét! Ha a megfordítás igaz, akkor bizonyítsa be, ha pedig hamis, akkor mutasson ellenpéldát!

a)	6 pont	
b)	4 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	14 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Egy nyári fesztiválon a résztvevők a „Szerencsekerekek” nevű játékkal tehetik próbára a szerencséjüket. Egy játék során a játékosnak két kereket kell külön-külön megforgatnia. A kerekek a forgatás után véletlenszerűen állnak meg valamelyik számnál. (Az azonos keréken lévő körcikkek középponti szöge egyenlő, a kilenc körcikk mindegyikén van egy-egy szám, a 100, a 200 vagy a 800.)

A forgatás előtt egy játékért 200 forintot kell fizetni. Ha a forgatás után a két kerék ugyanannál a számnál áll meg, akkor annyi forintot kap **nyereményként** a játékos, amennyi a két szám összege.
(Ha például az ábrán látható módon mindkét kerék a 200-as feliratnál áll meg, akkor $200 + 200 = 400$ forintot kap a játékos.) Ha a két kerék két különböző számnál áll meg, akkor a játékos nem kap pénzt.



a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10 játék során az 1. kerék pontosan négyszer áll meg 100-as számnál?

Egy játékot játszva a két kerékkel, a nyereménynek és a játék árának különbsége a játékos **nyeresége**.

b) Egy játékot játszva mennyi a nyereség várható értéke?

Ha a két keréken forgatott számok összege 1000, ezt „bingó”-nak nevezik. Ha bingót ér el egy játékos, akkor választhat egy zeneszámot a fesztiválsátorban.

c) Igazolja, hogy a bingó forgatásának valószínűsége 0,2.

d) Hányszor kell játszani ahhoz, hogy legalább 95% legyen annak a valószínűsége, hogy egy játékos legalább egyszer bingót forgasson?

a)	3 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
d)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

3. Egy vízszintesen futó egyenes alagút függőleges keresztmetszete egy olyan 8,1 m magas körszelet, amely egy 6 m sugarú körből származik. Az alagút hossza 340 m. (A kép illusztráció.)

a) Mutassa meg, hogy a körszelet körívéhez (egész fokra kerekítve) 221°-os középponti szög tartozik a körben!

b) Számítsa ki az alagút térfogatát! Az eredményt ezer m^3-re kerekítve adja meg!

Az alagút íves belső felületét kerámiaburkolattal látták el.

c) Hány m^2 a kerámiával burkolt felület?

a)	4 pont	
b)	7 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	14 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. A mérnökök egy új fejlesztésű autó üzemanyag-fogyasztását igyekeznek meghatározni különböző sebességek mellett. Eddig három mérési adat áll rendelkezésre: ezek szerint 40 km/h sebesség mellett 9,6 liter, 70 km/h sebesség mellett 6,9 liter, 120 km/h sebesség mellett pedig 6,4 liter a 100 km-enkénti üzemanyag-fogyasztás.

a) A mérési adatokkal számolva mennyi lenne ennek az autónak a 100 km-re vonatkozó átlagos üzemanyag-fogyasztása egy olyan úton, amelyen 30 percig 40 km/h sebességgel, majd 50 percen át 120 km/h sebességgel halad?

Három mérnök olyan f függvényeket keres, amelyek minél jobban közelítik az ismert mérési eredményeket, azaz amelyekre az $|f(40)-9,6|+|f(70)-6,9|+|f(120)-6,4|$ összeg értéke minél kisebb.
Mérnök Csaba az elsőfokú $f_1(x)=11,2-0,04x$ függvényt, Mérnök Dóra pedig az $f_2(x)=\frac{|x-100|}{10}+4$ abszolútérték-függvényt javasolja az autó 100 km-enkénti fogyasztásának közelítésére (x az autó sebességét jelöli km/h-ban mérve, a fogyasztást pedig literben kapjuk meg).

b) Az f_1 vagy az f_2 függvény közelíti-e jobban **a fenti értelemben** a három mérési eredményt?

Mérnök Elemér azt a másodfokú $f_3(x)=ax^2+bx+c$ függvényt kereste meg, amely mindhárom mérési adat esetén pontos eredményt ad, azaz $f_3(40)=9,6$; $f_3(70)=6,9$ és $f_3(120)=6,4$.

c) Határozza meg az a, b és c paraméterek értékét!

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

4. Egy biogazdaságban az L-es (nagy) méretű tojásokat 10 Ft-tal drágábban adják, mint az M-es (közepes) méretű tojásokat. Egy kereskedő a múlt héten 450 tojást vásárolt a biogazdaságtól 25 800 Ft-ért. Ezen a héten is 450 tojást vásárol, de csak 23 700 Ft-ot fizet, mert ezen a héten az M-es tojások száma ugyanannyi, mint a múlt héten az L-es tojások száma volt (és így az L-es tojások száma ugyanannyi, mint a múlt héten az M-es tojások száma volt).

a) Mennyibe kerül az M-es, illetve az L-es tojás darabja, és hány darab M-es tojást vásárolt a múlt héten a kereskedő? (A tojások egységára nem változott.)

Balázs pontosan 4 tojásból szeretne rántottát készíteni magának. Van 6 tojás a hűtőben, amelyek közül 5 jó és 1 romlott (záp), de ezt ő nem tudja. Balázs sietősen, egymás után üti bele a tojásokat egy tálba. Ha 4 jó tojás kerül a tálba, akkor már készülhet is a rántotta, ha azonban két vagy három jó tojás után a romlott tojás kerül a tálba, akkor sajnos nem sikerül Balázs terve. (Ha romlott tojást üt a tálba, akkor azt Balázs rögtön észreveszi, és az egészet kiönti. Ám ha ekkor még maradt legalább 4 tojás a hűtőben, akkor újra nekilát a rántotta készítésének.)

b) Számítsa ki, mennyi a valószínűsége annak, hogy Balázs elkészítheti a négytojásos rántottát!

a)	7 pont	
b)	5 pont	
Ö.:	12 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

6. **a)** Három lány és négy fiú moziba megy. Egy sorba szól a jegyük, hét egymás melletti székre. Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha két lány nem ülhet egymás mellé?

b) A nézőtéren az első és a második sorban már csak 3-3 szabad ülőhely van. A második sor szabad ülései pontosan az első sor szabad ülései mögött vannak.
Hányféleképpen tud leülni egy hatfős társaság a hat szabad helyre úgy, hogy a második sorban mindenki magasabb legyen a közvetlenül előtte ülőnél? (A hat személy magassága különböző.)

c) Egy 8 pontú egyszerű gráfnak 13 éle van, és az egyik pontjának a fokszáma 6.
Igazolja, hogy van hárompontú kör (gráfelméleti háromszög) a gráfban!

a)	6 pont	
b)	6 pont	
c)	4 pont	
Ö.:	16 pont	

II.

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

5. Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB = 15$, $BC = 10$. Az ABC szöget a DB átló két részre osztja: $ABD\sphericalangle = 20°$, $DBC\sphericalangle = 40°$.

a) Igazolja, hogy az AC átló hossza pontosan $5\cdot\sqrt{7}$!

b) Igazolja, hogy az ACD háromszög szögei 20°, 40° és 120°!

c) Számítsa ki az $ABCD$ négyszög területét!

A $KLMN$ deltoidban a K és az M csúcsnál derékszög van, a KM átló hossza 9,6 cm. Az LN szimmetriaátlót az átlók metszéspontja két olyan szakaszra osztja, amelyek hosszának különbsége 2,8 cm.

d) Számítsa ki a deltoid területét!

a)	3 pont	
b)	2 pont	
c)	4 pont	
d)	7 pont	
Ö.:	16 pont	